МОДЕЛЬ ОЛИГОПОЛИИ БЕРТРАНА С НЕСОВЕРШЕННОЙ ЦЕНОВОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ СПРОСА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА ФИРМ [1]

А.Ю. Филатов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Иркутск
e-mail: fial@isem.sei.irk.ru

Аннотация. В работе рассматривается развитие модели олигополии Бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса. В классической модели ценовой войны Бертрана рынок полностью захватывает фирма, установившая на свою продукцию самую низкую цену. В реалистической ситуации у более дорогих фирмы до определенного ценового предела по-прежнему остается свой круг покупателей. Формализовав данное предположение, можно вывести зависимости оптимальных цен и объемов производства от цен конкурентов. Рассмотрен случай произвольного числа фирм в отрасли. Продемонстрирована возможность существования равновесия Нэша при несовпадающих ценах и объемах продаж олигополистов. Приведены результаты расчетов на численном примере.

Ключевые слова: модели олигополии, олигополия Бертрана, равновесие Нэша, эластичность.

Введение

Большинство рынков в современной экономике относят к рынкам несовершенной конкуренции, то есть рынкам, на которых каждый производитель в состоянии существенно влиять на цену продукции. При этом часто высокий уровень концентрации производителей сочетается с дифференциацией продукта (монополистическая конкуренция, олигополия), наличием барьеров входа в отрасль (монополия, олигополия) и взаимодействием между производителями (олигополия).

Рассмотрим модель ценовой олигополии без сговора. Исходный вариант – ценовая война Бертрана [1], в котором олигополисты независимо друг от друга вырабатывают решение об уровне цены, ориентируясь на цены конкурентов, а все потребители приобретают продукцию у олигополиста с самой дешевой продукцией – имеет очевидные недостатки. В частности, следствием предпосылок такой модели в случае постоянства и равенства средних издержек является парадокс Бертрана: фирмы поочередно снижают цены до уровня себестоимости и в точке равновесия получают нулевые прибыли, что полностью эквивалентно ситуации совершенной конкуренции.

Решение парадокса Бертрана с помощью модели Эджворта, в которой объем производства каждой фирмы жестко ограничен сверху определенной величиной, или с помощью модели с возрастающими предельными издержками (мягкий вариант модели Эджворта), также не всегда адекватно реальности. В связи с этим в [2] была предложена альтернативная модификация модели Бертрана, предполагающая, что при небольшом различии цен у более дорогой фирмы останутся свои покупатели. Действительно, практически любой продукт можно считать дифференцированным, поскольку имеются различия в месторасположении фирм, качестве обслуживания и сервиса. Также нельзя не учитывать неполноту информации и издержки на поиск самой дешевой фирмы.

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке РГНФ (проект 06-02-00266а)

Модель дуополии Бертрана с несовершенной эластичностью спроса

Модель из [2] опирается на следующие предположения. На рынке продукции, суммарный спрос на которую составляет $Q(p) = a - bp$, действуют 2 независимых конкурента. Цена p_2 второй фирмы зафиксирована. Если первая фирма установит такую же цену $p_1 = p_2$, рынок разделится пополам. Спрос q_2 на продукцию второй фирмы линейно убывает с падением цены p_1 первой и становится нулевым в точке $p^*(p_2)$, в которой суммарный спрос вдвое больше, чем при цене p_2. Издержки производства единицы продукции одинаковы для обеих фирм и равны c.

Заметим, что рассматривается ситуация $p_1 \le p_2$. В случае, когда более дешевой окажется вторая фирма, картина полностью симметрична. Поэтому примем, что нумерация фирм такова, что на данный момент самой дешевой является первая фирма.

Было получено, что спрос на продукцию фирм вычисляется по формулам

$$q_1(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(a - 3bp_1 + 2bp_2) = \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}bp_1 + bp_2, \quad (1)$$

$$q_2(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(a + bp_1 - 2bp_2) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}bp_1 - bp_2. \quad (2)$$

Данные формулы справедливы, когда обе фирмы имеют некоторую положительную долю продаж, то есть при выполнении условия $p_1 \ge p^*(p_2)$. Однако, если разница в ценах слишком велика: $c < p_1 < p^*(p_2)$, дорогая фирма может снизить цену p_2 (попутно снизив границу $p^*(p_2)$), вернувшись на рынок и получая положительную прибыль. Таким образом, в равновесии дополнительное условие заведомо выполняется.

Кривые реакции (оптимальная цена каждой фирмы в зависимости от цены конкурента) выглядят

$$p_1(p_2) = \frac{a}{6b} + \frac{c}{2} + \frac{1}{3}p_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{a}{b} + 3c + 2p_2\right), \quad (3)$$

$$p_2(p_1) = \frac{a}{4b} + \frac{c}{2} + \frac{1}{4}p_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + 2c + p_1\right). \quad (4)$$

Равновесие Нэша (точка пересечения кривых реакции (3) и (4)) имеет вид

$$p_1 = \frac{1}{11}\left(3\frac{a}{b} + 8c\right), \quad p_2 = \frac{1}{22}\left(7\frac{a}{b} + 15c\right). \quad (5)$$

В точке Нэша ни одной из фирм не выгодно увеличивать или уменьшать цену продукции. Следует отметить, что цены, объемы производства и прибыли фирм, изначально одинаковых, будут различны. Первая позиционирует себя как дешевая фирма и захватывает большую долю рынка, а вторая, более дорогая, работает на меньшем сегменте, но получает большую удельную прибыль.

Численный пример

Продемонстрируем этот факт на численном примере, предложенном [3] на студенческой олимпиаде по математической экономике. Рассматривается функционирующий в выше выписанных условиях рынок компакт-дисков, суммарный месячный спрос на которые составляет $Q = 160 - p$ (тыс. шт.). На рынке действуют 2 независимых конкурента, каждому из которых компакт-диски обходятся в 50 руб. По формуле (5) вычислим равновесие Нэша: $p_1 = 80$, $p_2 = 85$, $q_1 = 45$, $q_2 = 35$, $\pi_1 = 1350$, $\pi_2 = 1225$.

На первый взгляд вызывает сомнение тот факт, что вторая фирма, получающая меньшие прибыли, будет довольствоваться этим положением. Однако посмотрим, что произойдет, если она решит захватить большую долю рынка, позиционируя себя в качестве дешевой. В этом случае в формулах (3) и (4) номера фирм меняются местами. Цена конкурента оказывается зафиксированной $p_1 = 80$. По формуле (3) оптимальной оказывается выбор $\underline{p}_2 = 78{,}33$, при этом прибыли составят соответственно $\underline{\pi}_1 = 1175$ и

$\underline{\pi}_2 = 1204 < 1225$. Если вторая фирма желает максимизировать свои прибыли, а не уменьшить прибыли конкурента, то данная стратегия для нее неперспективна.

Проверим и другую альтернативу. Если первая фирма захочет поднять цену для получения большей удельной прибыли, а цена конкурента фиксируется на уровне $p_2 = 85$, то по формуле (4) (номера фирм снова меняются местами) получим $\overline{p}_1 = 86{,}25$, откуда следует, что $\overline{\pi}_1 = 1314 < 1350$, $\overline{\pi}_2 = 1356$. Несмотря на то, что суммарные прибыли выросли, первая фирма значительно проиграла, из чего следует вывод, что она не будет действовать таким образом.

Попробуем получить экономическое объяснение факту, что изначально одинаковые фирмы действительно могут в точке равновесия получать различные прибыли. Обратим внимание на одну особенность. Если снижается цена в дорогой фирме, то она переманивает часть покупателей, прежде приобретавших продукцию у дешевого конкурента, однако суммарный объем продаж остается прежним. Если же снижается цена в дешевой фирме, то помимо перераспределения покупателей происходит расширение рынка: продукции в совокупности приобретается больше, чем раньше. Наряду с эффектом замещения действует и эффект дохода.

Запишем уравнения спроса (1), (2) на продукцию фирм в матричном виде:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + b\mathbf{B}\mathbf{p} \right). \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 - 1/2 & 1 \\ 1 - 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

Видим, что в явном виде выписаны составляющие, отвечающие за перераспределение покупателей между фирмами и за изменение рынка: при повышении цены в *j*-фирме на 1 руб. объем продаж в ней сокращается на величину *b*, а у конкурента ровно настолько же возрастает. Однако при повышении цены в первой (более дешевой) фирме дополнительно на величину *b* сокращается весь рынок, и это бремя равномерно ложится на обе фирмы дополнительным сокращением продаж на $b/2$.

Развитие модели на случай произвольного числа фирм

Представленную модель можно распространить на случай произвольного числа фирм. Изменение коснется вида матрицы **B**. Пусть при повышении цены в *j*-фирме на каждый рубль объем продаж в ней сокращается на величину $b\Delta$, а у каждого из $(n-1)$ конкурентов увеличивается на $b\Delta/(n-1)$. Также при повышении цены на каждый рубль в первой (самой дешевой) фирме суммарный объем продаж уменьшается на величину *b*, что означает дополнительное сокращение продаж в каждой фирме на b/n. Получим уравнение спроса следующего вида:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{n}\mathbf{a} + b\mathbf{B}\mathbf{p} \right), \qquad (7)$$

где $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ \dots \\ a \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\Delta - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \frac{\Delta}{n-1} & \dots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & -\Delta & \frac{\Delta}{n-1} & \dots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & -\Delta & \dots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \frac{\Delta}{n-1} & \dots & -\Delta \end{pmatrix}$.

Выпишем эти же соотношения покомпонентно:

$$q_1 = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2}^{n} p_j \right), \tag{8}$$

$$q_i = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2,\ j \neq i}^{n} p_j - n\Delta bp_i \right), \quad i = 2,...,n. \tag{9}$$

Построим кривые реакции для каждой фирмы, максимизировав их прибыли:

$$\pi_1 = (p_1 - c)q_1 =$$

$$= \frac{1}{n}\left(ap_1 - (n\Delta + 1)bp_1^2 + \frac{n\Delta}{n-1} bp_1 \sum_{j=2}^{n} p_j - ac + (n\Delta + 1)bcp_1 - \frac{n\Delta}{n-1} bc \sum_{j=2}^{n} p_j \right) \to \max_{p_1},$$

$$\pi_i = (p_i - c)q_i = \frac{1}{n}\left(ap_i + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bp_1 p_i + \frac{n\Delta}{n-1} bp_i \sum_{j=2,\ j \neq i}^{n} p_j - n\Delta bp_i^2 \right) -$$

$$- \frac{1}{n}\left(ac + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bcp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} bc \sum_{j=2,\ j \neq i}^{n} p_j - n\Delta bcp_i \right) \to \max_{p_i}, \quad i = 2,...,n.$$

Продифференцируем полученные функции:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{1}{n}\left(a - 2(n\Delta + 1)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2}^{n} p_j + (n\Delta + 1)bc \right) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2,\ j \neq i}^{n} p_j - 2n\Delta bp_i + n\Delta bc \right) = 0, \quad i = 2,...,n. \tag{11}$$

Заметим, что особой является только самая дешевая фирма, все остальные не отличаются между собой, следовательно, в точке равновесия будут выполняться условия

$$p_2 = p_3 = ... = p_n = p^*, \; q_2 = q_3 = ... = q_n = q^*, \; \pi_2 = \pi_3 = ... = \pi_n = \pi^*. \tag{12}$$

Перепишем с учетом этих равенств (10), (11):

$$a - 2(n\Delta + 1)bp_1 + n\Delta bp^* + (n\Delta + 1)bc = 0, \tag{13}$$

$$a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bp_1 + \frac{n(n-2)\Delta}{n-1} bp^* - 2n\Delta bp^* + n\Delta bc = 0,$$

$$a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1 \right) bp_1 - \frac{n^2\Delta}{n-1} bp^* + n\Delta bc = 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) выразим p^* через p_1:

$$p^* = \frac{-\frac{a}{b} - (n\Delta + 1)c + 2(n\Delta + 1)p_1}{n\Delta}, \tag{15}$$

$$p^* = \frac{\frac{n-1}{n}\frac{a}{b} + (n-1)\Delta c + \frac{n\Delta - n + 1}{n} p_1}{n\Delta}. \tag{16}$$

Приравняем (15) и (16):

$$\left(\frac{n-1}{n} + 1 \right) \frac{a}{b} + (n\Delta - \Delta + n\Delta + 1)c + \frac{n\Delta - n + 1 - 2n^2\Delta - 2n}{n} p_1 = 0,$$

$$\frac{(2n-1)n\Delta + (2n-1) + n}{n} p_1 = \frac{2n-1}{n}\frac{a}{b} + \left(\frac{(2n-1)n\Delta + n}{n} \right) c,$$

$$p_1 = \frac{\frac{a}{b} + \left(n\Delta + 1 + \frac{n}{2n-1}\right)c - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)} = c + \frac{\frac{a}{b} - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)}. \tag{17}$$

Подставим значение из формулы (17) в (15):

$$p^* = \frac{-\frac{a}{b} - (n\Delta + 1)c + 2(n\Delta + 1)\left(c + \frac{a/b - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)}\right)}{n\Delta} =$$

$$= \frac{-\frac{a}{b} + (n\Delta + 1)c + 2(n\Delta + 1)\frac{a/b - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)}}{n\Delta} =$$

$$= c + \frac{c - \frac{a}{b} + 2(n\Delta + 1 + n/(2n-1))\frac{a/b - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)} - \frac{2n}{2n-1}\frac{a/b - c}{n\Delta + 1 + n/(2n-1)}}{n\Delta},$$

$$p^* = c + \frac{\frac{a}{b} - c}{n\Delta} - \frac{\frac{2}{2n-1}\left(\frac{a}{b} - c\right)}{n\Delta^2 + \Delta + n\Delta/(2n-1)}. \tag{18}$$

Оптимальные объемы производства найдем по формулам (8), (9) с учетом равенств (12). Они имеют следующий вид:

$$q_1 = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + n\Delta bp^*\right), \tag{19}$$

$$q^* = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 + \left(\frac{n(n-2)}{n-1} - n\right)\Delta bp^*\right),$$

$$q^* = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 - \frac{n}{n-1}\Delta bp^*\right). \tag{20}$$

Рассмотрим несколько возможных вариантов значений величины Δ. Все эти варианты приводят при $n = 2$ к формулам (1), (2) (для этого при $n = 2$ должно выполняться условие $\Delta = 1$), но являются обобщениями на случай произвольного *n*.

Первый вариант $\Delta \equiv 1$ означает, что изменение цены в любой из фирм приведет к изменению объема ее продаж, не зависящему от количества конкурентов. В то же время, при большом числе фирм на рынке влияние на каждого из конкурентов становится минимальным.

Второй вариант (противоположная крайность) $\Delta = n - 1$ приводит к тому, что увеличение числа конкурентов резко усиливает реакцию потребителей на изменение цены одного из них. В этом случае продажи каждого из $(n-1)$ конкурентов изменяются на фиксированную величину, вне зависимости от их числа. Следовательно, продажи самой фирмы меняются прямо пропорционально количеству конкурентов.

Третий, промежуточный вариант $\Delta = 2(n-1)/n$ с одной стороны предполагает усиление реакции потребителя на изменение цены в одной из фирм при увеличении числа конкурентов, но с другой для конкурентного рынка (при $n \to \infty$ $\Delta \to 2$) влияние всего вдвое сильнее, чем в случае дуополии (при $n = 2$ $\Delta = 1$). Дополнительным обоснованием для третьего варианта является тот факт, что если все дорогие фирмы ведут единую ценовую политику $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = p^*$, то функция спроса на их продукцию

$$q^* = \frac{1}{n}\left(a + bp_1 - 2bp^*\right)$$

идентична виду (2). В частности, при любой зафиксированной цене дешевой фирмы, ее конкуренты полностью теряют рынок (q^* обращается в ноль) при одной и той же цене, не зависящей от их количества.

Продемонстрируем полученные результаты на приведенном выше численном примере с $Q = 160 - p$ и $c = 50$. Сведем в таблицах 1, 2 и 3 равновесные цены, объемы продаж, прибыли фирм, а также суммарные прибыли на рынке в зависимости от их количества и реакции рынка на изменение цен.

Табл. 1. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta \equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	80,0	73,9	69,7	66,8	64,6	62,9	61,5	60,4	59,5
p^*	85,0	77,1	71,9	68,3	65,7	63,7	62,2	61,0	60,0
q_1	45,0	31,9	24,7	20,1	17,0	14,7	13,0	11,6	10,5
q^*	35,0	27,1	21,9	18,3	15,7	13,7	12,2	11,0	10,0
π_1	1350	762	487	338	248	190	150	121	100
π^*	1225	734	478	334	246	189	149	121	100
π	2575	2231	1921	1673	1478	1321	1194	1088	999

Табл. 2. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	80,0	69,6	64,5	61,5	59,5	58,1	57,1	56,3	55,6
p^*	85,0	71,6	65,6	62,2	60,0	58,4	57,3	56,5	55,8
q_1	45,0	32,7	25,4	20,7	17,5	15,1	13,3	11,9	10,7
q^*	35,0	28,8	23,3	19,4	16,6	14,5	12,8	11,5	10,4
π_1	1350	643	369	239	166	123	94	74	60
π^*	1225	622	363	236	165	122	94	74	60
π	2575	1888	1460	1183	993	855	750	668	602

Табл. 3. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = n - 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	80,0	64,5	58,1	55,1	53,5	52,5	51,9	51,5	51,2
p^*	85,0	65,4	58,4	55,2	53,5	52,6	51,9	51,5	51,2
q_1	45,0	33,8	26,3	21,4	18,0	15,5	13,6	12,1	10,9
q^*	35,0	30,9	25,2	20,9	17,7	15,3	13,5	12,0	10,9
π_1	1350	489	214	109	63	39	26	18	13
π^*	1225	477	211	109	63	39	26	18	13
π	2575	1442	848	545	376	274	208	163	131

Представленные результаты демонстрируют, что

1. Увеличение числа фирм на рынке приводит к снижению и выравниванию цен, снижению прибылей фирм (в том числе, суммарной) и их выравниванию, однако даже при большом количестве фирм, все они в состоянии получать прибыль.

2. Увеличение значения Δ, что означает усиление реакции потребителя на разницу цен ($\Delta \to \infty$ приводит к классической модели Бертрана), ведет к более быстрому снижению и выравниванию цен, сокращению и выравниванию прибылей фирм. В то же

время, даже при большом, но конечном значении Δ фирмы в состоянии получать прибыль.

Представленная модель имеет некоторые общие черты с моделью олигополии Курно с поправкой на то, что в ней стратегическими переменными являются не объемы продаж, а цены. Соответственно, можно рассмотреть и ценовой аналог модели Штакельберга.

Однако прежде, чем перейти к рассмотрению модифицированных моделей, необходимо убедиться в том, что не произойдет «инверсии фирм»: при достаточно высокой цене первой фирмы, кому-то из конкурентов будет экономически выгоднее занять ее место, выиграв в объеме продаж сильнее, чем потеряв в удельной прибыли. Первая фирма будет стараться не допустить подобной ситуации.

Возможность инверсии фирм

Определим, при каких ценах первая фирма может гарантировать себе место самой дешевой. Пускай ее цена составляет p_1. Тогда оптимальной ценой остальных олигополистов будет $p^*(p_1)$, вычисляемая по формуле (16). При этом каждый из них будет продавать продукцию в объеме $q^*(p_1, p^*(p_1))$, вычисляемом по формуле (20), а прибыль составит

$$\pi^* = (p^*(p_1) - c)q^*(p_1, p^*(p_1)).$$

Если кто-то из дорогих конкурентов решит занять место дешевой фирмы, продавая продукцию по цене $\underline{p}^*$, а остальные фирмы оставят цены на прежнем уровне, то ее объем продаж по формуле (8) составит

$$\underline{q}^* = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)b\underline{p}^* + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2}^{n} p_j\right),$$

$$\underline{q}^* = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)b\underline{p}^* + n\Delta b p^* - \frac{n\Delta}{n-1} b(p^* - p_1)\right),$$

а прибыль будет равна

$$\underline{\pi}^* = (\underline{p}^* - c)\underline{q}^* = \frac{1}{n}(\underline{p}^* - c)\left(a - (n\Delta + 1)b\underline{p}^* + n\Delta b p^* - \frac{n\Delta}{n-1} b(p^* - p_1)\right) \to \max_{\underline{p}^*}.$$

Вычислив производную и приравняв ее к нулю, найдем оптимальную цену:

$$\underline{p}^* = \frac{a/b + (n\Delta + 1)c + n\Delta p^* - \frac{n\Delta}{n-1}(p^* - p_1)}{2(n\Delta + 1)}.$$

Первая фирма будет защищена от подобного развития событий, если будет выполняться следующее условие:

$$\pi^* > \underline{\pi}^*.$$

В общем случае зависимость критической цены первой фирмы от числа фирм и реакции рынка на изменение цен имеет довольно сложный вид, однако в каждом конкретном случае легко проверить, может ли иметь место инверсия фирм. Также нетрудно численно найти максимальную цену p_1, при которой первая фирма гарантирует себе место самой дешевой.

Аналогично рассмотрим симметричный случай, когда дешевая фирма повышает цену до значения $\overline{p}_1$, а остальные остаются на прежнем уровне p^*. Ее объем продаж вычисляется по формуле (9) в виде

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{n}(a + (n\Delta - 1)bp^* - n\Delta b\overline{p}_1).$$

Максимизируем прибыль, приравняв ее производную к нулю:

$$\bar{\pi}_1 = (\bar{p}_1 - c)\bar{q}_1 = \frac{1}{n}(\bar{p}_1 - c)(a + (n\Delta - 1)bp^* - n\Delta b\bar{p}_1) \to \max_{\bar{p}_1},$$

$$\bar{p}_1 = \frac{a + (n\Delta - 1)bp^* + bcn\Delta}{2bn\Delta}$$

Первая фирма уйдет с дешевого сегмента рынка, если цены конкурентов будут слишком низкими и потеря части покупателей компенсируется существенным увеличением удельной прибыли:

$$\bar{\pi}_1 > \pi_1.$$

Однако на рынках, находящихся в состоянии равновесия, подобная ситуация, в отличие от предыдущего случая, маловероятна. Легко убедиться, что в равновесии Нэша (17)–(20) для всех трех рассмотренных значений Δ первой фирме выгодно оставаться самой дешевой. Все последующие модели связаны с увеличением прибылей на основе повышения цен, следовательно, в них проверки второго вида инверсии вообще не требуется.

Модель «лидер–последователь»; равновесие Нэша в двухуровневой игре

Кривые реакции самой дешевой и всех остальных фирм (первая выводится выражением p_1 через p^* из (13), а вторая была выписана в (16)) имеют следующий вид:

$$p_1(p^*) = \frac{a + (n\Delta + 1)bc + n\Delta bp^*}{2b(n\Delta + 1)}, \qquad (21)$$

$$p^*(p_1) = \frac{\frac{n-1}{n}\frac{a}{b} + (n-1)\Delta c + \frac{n\Delta - n + 1}{n}p_1}{n\Delta}. \qquad (22)$$

Исходя из предположения, что все дорогие фирмы (последователи) будут вести себя оптимальным образом, самая дешевая фирма (лидер) может максимизировать свою прибыль. Используя формулу (19) зависимости объемов продаж от цен, получим:

$$\pi_1(p_1, p^*(p_1)) = (p_1 - c)q_1(p_1, p^*(p_1)) = (p_1 - c)\frac{1}{n}(a - (n\Delta + 1)bp_1 + n\Delta bp^*(p_1)).$$

Поскольку последователи выбирают цену в соответствии с формулой (22),

$$n\Delta bp^*(p_1) = \frac{n-1}{n}a + (n-1)\Delta bc + \frac{n\Delta - n + 1}{n}bp_1,$$

$$\pi_1 = \frac{1}{n}(p_1 - c)\left(a - n\Delta bp_1 - bp_1 + a - \frac{a}{n} + n\Delta bc - \Delta bc + \Delta bp_1 - bp_1 + \frac{bp_1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(p_1 - c)\left(2a - (n-1)\Delta bp_1 - 2bp_1 + (n-1)\Delta bc - \frac{a}{n} + \frac{bp_1}{n}\right) \to \max_{p_1}.$$

Приравняв к нулю производную и проведя ряд преобразований, получим

$$p_1 = c + \frac{a/b - c}{2 + n - n\Delta/(2n-1)}. \qquad (23)$$

Остается проверить возможность инверсии первого вида: существенное снижение цены одним из дорогих конкурентов. Как показывают расчеты для приведенного выше численного примера, при $\Delta \equiv 1$ (потребители слабо реагируют на разницу цен) и $n > 2$ инверсии не произойдет. В то же время, если усиливается значимость ценового фактора для потребителя ($\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n - 1$), первая фирма не в состоянии поднять цену до уровня (23) из-за риска снижения цены кем-то из конкурентов. Таким образом, цена будет установлена на максимальном уровне, гарантирующем отсутствие инверсии.

Сведем в таблицах 4, 5 и 6 данные по ценам, объемам продаж и прибылям, выдаваемые моделью «лидер(1)–последователи(*)» в зависимости от количества фирм и реакции рынка на изменение цен. Как и в случае одновременного выбора оптимальных цен, рассмотрим 3 возможные ситуации: $\Delta \equiv 1$, $\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n-1$.

Табл. 4. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta \equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	81,9	75,0	70,3	67,1	64,8	63,0	61,6	60,5	59,6
p^*	85,5	77,2	71,9	68,3	65,7	63,7	62,2	61,0	60,0
q_1	42,6	30,6	24,1	19,8	16,8	14,6	12,9	11,5	10,5
q^*	35,5	27,2	21,9	18,3	15,7	13,7	12,2	11,0	10,0
π_1	1360	764	488	338	248	190	150	121	100
π^*	1258	741	479	334	246	189	149	121	100
π	2618	2246	1925	1675	1478	1322	1194	1088	999

Табл. 5. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	81,9	70,5	65,0	61,8	59,7	58,3	57,2	56,4	55,7
p^*	85,5	71,8	65,6	62,2	60,0	58,4	57,3	56,5	55,8
q_1	42,6	31,4	24,6	20,2	17,1	14,8	13,1	11,7	10,6
q^*	35,5	29,0	23,4	19,5	16,6	14,5	12,8	11,5	10,4
π_1	1360	646	370	239	167	123	94	74	60
π^*	1258	631	366	237	166	122	94	74	60
π	2618	1908	1469	1189	996	857	751	669	602

Табл. 6. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = n-1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	81,9	64,9	58,3	55,2	53,5	52,5	51,9	51,5	51,2
p^*	85,5	65,5	58,4	55,2	53,5	52,6	51,9	51,5	51,2
q_1	42,6	32,9	25,9	21,2	17,9	15,5	13,7	12,1	11,2
q^*	35,5	31,1	25,3	20,9	17,7	15,3	13,5	12,0	10,8
π_1	1360	491	214	110	63	39	26	18	13
π^*	1258	483	213	109	63	39	26	18	13
π	2618	1458	853	546	377	274	208	163	131

Основным нетривиальным выводом, диаметрально противоположным результатам модели Штакельберга, является факт, что хотя лидер, повышая цену, увеличивает свою прибыль, но сильнее свои прибыли увеличивают последователи. Если же последователи каким-то образом в состоянии сигнализировать дешевой фирме о своем нежелании бороться за дешевый ценовой сегмент (гарантируют отсутствие инверсии), то их прибыли увеличиваются еще существеннее.

Симметричный случай дорогого лидера реализуется только в том случае, если все дорогие фирмы гарантируют сохранение единых цен p^*. Поскольку односторонний отказ от данной стратегии в пользу инверсии при высоких ценах экономически выгоден для каждой отдельной фирмы, подобная ситуация возможна только в результате сговора. В то же время такой сговор принесет его участникам существенное увеличение прибылей. Рассмотрим эту ситуацию.

Предполагая, что первая фирма (последователь) будет вести себя оптимальным образом (выбирая цену в соответствии с формулой (21)), лидеры могут максимизировать прибыль:

$$\pi^*(p_1(p^*), p_1) = (p^* - c)q^* . \qquad (24)$$

Поскольку последователь выбирает цену в соответствии с формулой (21),

$$q^* = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1(p^*) - \frac{n}{n-1}\Delta bp^*\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)\frac{a + (n\Delta + 1)bc + n\Delta bp^*}{2(n\Delta + 1)} - \frac{n}{n-1}\Delta bp^*\right).$$

Выполнив ряд преобразований, обнаружим, что объемы продаж лидеров равны

$$q^* = \frac{\Delta bc}{2(n-1)} + \frac{a - bc}{2n} + \frac{an\Delta}{2(n-1)(n\Delta + 1)} - \frac{\Delta bp^*(n\Delta + n + 1)}{2(n-1)(n\Delta + 1)}$$

Приравняв к нулю производную функции прибыли (24), получим

$$p^* = c + \frac{(a - bc)(2n^2\Delta - n\Delta + n - 1)}{2n\Delta b(n\Delta + n + 1)}. \qquad (25)$$

Расчеты показывают, что благодаря сговору лидеры могут существенно поднять цены – тем сильнее, чем слабее реакция потребителя на разницу цен. Если в предыдущей модели «лидер(1)–последователи(*)» при большом количестве фирм цены и объемы продаж практически полностью совпадали с исходным равновесием Нэша, то здесь даже при $n = 10$ наблюдается существенное отличие.

Второй вывод сходен с выводом по предыдущей модели, но выражен более ярко: последователь получает большую (и в данном случае существенно большую) прибавку к прибыли, чем лидеры. Разница достигает нескольких раз.

И наконец, третий вывод заключается в следующем: при выполнении определенных условий (не очень сильная реакция потребителей на разницу цен) в рамках данной модели возможно увеличение суммарной прибыли при увеличении количества фирм. Что говорит, в частности, об экономической целесообразности дробления крупных компаний на несколько мелких. Доля дешевой фирмы на рынке при этом, конечно, снижается.

Результаты, полученные для приведенного численного примера в соответствии с моделью «лидеры(*)–последователь(1)» в зависимости от количества фирм и трех вариантов реакции рынка на изменение цен $\Delta \equiv 1$, $\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n - 1$, сведены в таблицах 7, 8 и 9.

Табл. 7. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta \equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	81,2	80,4	79,9	79,6	79,3	79,1	78,9	78,8	78,7
p^*	88,5	94,5	97,4	99,0	100,1	100,8	101,4	101,8	102,1
q_1	46,8	40,6	37,4	35,5	34,2	33,3	32,6	32,0	31,6
q^*	32,1	19,5	14,2	11,2	9,3	7,9	6,9	6,1	5,5
π_1	1457	1236	1121	1050	1002	968	942	922	905
π^*	1235	867	673	550	465	403	356	318	288
π	2692	2971	3140	3251	3330	3388	3433	3469	3498

Табл. 8. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	81,2	76,1	73,9	72,7	71,9	71,4	71	70,7	70,4
p^*	88,5	87,8	87,5	87,3	87,2	87,1	87,1	87,0	87,0
q_1	46,8	43,5	41,9	40,9	40,2	39,7	39,3	39,0	38,8
q^*	32,1	20,2	14,7	11,6	9,6	8,2	7,1	6,3	5,6
π_1	1457	1138	1002	927	880	848	824	806	792
π^*	1235	763	552	433	357	303	263	233	209
π	2692	2663	2659	2661	2663	2665	2667	2669	2671

Табл. 9. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = n-1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	81,2	70,4	65,1	61,9	59,8	58,3	57,3	56,4	55,7
p^*	88,5	79,3	73,5	69,5	66,6	64,5	62,8	61,5	60,4
q_1	46,8	47,7	48,9	49,9	50,7	51,2	51,7	52,0	52,3
q^*	32,1	21,0	15,3	12,0	9,9	8,4	7,3	6,4	5,8
π_1	1457	974	737	593	497	427	375	334	301
π^*	1235	615	360	234	164	122	93	74	60
π	2692	2203	1816	1531	1319	1156	1028	925	841

Отметим еще одно свойство. В отличие от модели олигополии Штакельберга, где решение всех фирм играть роль лидеров приводит к катастрофическому затовариванию рынка и снижению цен, здесь одновременное повышение цен до лидерского уровня только увеличит их суммарные прибыли.

Картель и максимизация прибыли

Для полноты исследования рассмотрим возможные действия фирм в ситуации сговора. Классическая модель предлагает картельные соглашения – сокращение суммарного объема производства до монопольного и соответственное увеличение цены. Квоты для всех участников рынка в этом случае устанавливаются на уровне

$$q_i = \frac{1}{2n}(a - bc),\ i = 1,...,n,$$

а цены – на уровне

$$p_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + c\right),\ i = 1,...,n.$$

Для приведенного численного примера цена установится на уровне $p = 105$ руб., а зависимость объема продаж от числа фирм на рынке выразится формулой $q_i = 55/n$. Суммарная прибыль всех фирм будет неизменно равна $\pi = 3025$. Сведем все данные по модели в таблице 10.

Табл. 10. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа.

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
q_i	27,5	18,3	13,8	11	9,2	7,9	6,9	6,1	5,5
π_i	1513	1008	756	605	504	432	378	336	303

Суммарная прибыль в ситуации картеля при классических предпосылках будет максимальна. Действительно, одновременное изменение цен фирм как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения сократит их прибыли, а одностороннее изменение приведет к полному захвату рынка более дешевой фирмой, что выгодно для нее, но обнулит прибыль конкурента и уменьшит суммарную прибыль.

В нашей ситуации, когда остаются покупатели, по каким-либо причинам покупающие продукцию в более дорогой фирме, можно получить суммарную прибыль, больше картельной с помощью ценовой дискриминации: покупатели, ориентированные на минимум цены, покупают у более дешевого производителя, а часть из обеспеченных (кому все равно или почти все равно) заплатит больше. Найдем оптимальные цены с помощью максимизации суммарной прибыли:

$$\pi(p_1,...,p_n)=\pi_1(p_1,...,p_n)+...+\pi_n(p_1,...p_n)=(p_1-c)q_1+...+(p_n-c)q_n=$$

$$=\frac{1}{n}(p_1-c)\left(a-(n\Delta+1)bp_1+\frac{n\Delta}{n-1}b(p_2+...+p_3)\right)+$$

$$+\frac{1}{n}(p_2-c)\left(a+\left(\frac{n\Delta}{n-1}-1\right)bp_1+\frac{n\Delta}{n-1}b(p_3+...+p_n)-n\Delta bp_2\right)+...+$$

$$+\frac{1}{n}(p_n-c)\left(a+\left(\frac{n\Delta}{n-1}-1\right)bp_1+\frac{n\Delta}{n-1}b(p_2+...+p_{n-1})-n\Delta bp_n\right)\to\max_{p_1,...,p_n}.$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю. Попутно заметим, что для всех дорогих фирм $i=2,...,n$ условия будут одинаковыми. Следовательно, все они в точке оптимума установят единую цену $p_2=p_3=...=p_n=p^*$. Условия оптимальности будут выглядеть следующим образом:

$$p_1=\frac{\frac{a}{b}+nc+(2n\Delta-n+1)p^*}{2(n\Delta+1)},\tag{26}$$

$$p^*=\frac{\frac{a}{b}(n-1)+(2n\Delta-n+1)p_1}{2n\Delta}.\tag{27}$$

Решив систему из 2 уравнений (26)–(27) относительно p_1 и p^*, получим

$$p^*=\frac{\frac{a}{b}\left(2n^2\Delta+n-1\right)+c\left(2n^2\Delta-n^2+n\right)}{4n^2\Delta-n^2+2n-1}.\tag{28}$$

Ситуация (28), в отличие от равновесий Нэша в одноуровневой и двухуровневой играх, не является устойчивой. Для каждой из дорогих фирмы есть огромные стимулы снизить цену и увеличить свою долю на рынке. Однако в случаях, если соглашения между фирмами достаточно жесткие (или, например, в случае, когда существует несколько торговых точек, принадлежащих одному производителю), суммарная прибыль (которая затем может перераспределяться) будет максимальна и больше монопольной.

Результаты расчетов на численном примере сведем в таблицах 11, 12 и 13.

Табл. 11. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta\equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	101,3	98,1	96,0	94,5	93,4	92,6	92,0	91,5	91,0
p^*	116,0	118,8	120,0	120,7	121,2	121,5	121,7	121,9	122,1
q_1	44,0	41,3	40,0	39,3	38,8	38,5	38,3	38,1	37,9
q^*	14,7	10,3	8,0	6,5	5,5	4,8	4,3	3,8	3,4
π_1	2259	1985	1840	1749	1687	1641	1606	1579	1556
π^*	968	709	560	463	395	344	305	274	249
π	3227	3403	3520	3601	3661	3706	3741	3770	3793

Табл. 12. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	101,3	100,0	99,3	98,9	98,6	98,4	98,2	98,1	98,0
p^*	116,0	115,0	114,5	114,2	114,0	113,8	113,7	113,6	113,5
q_1	44,0	40,0	37,9	36,7	35,8	35,2	34,7	34,4	34,1
q^*	14,7	10,0	7,6	6,1	5,1	4,4	3,9	3,4	3,1
π_1	2259	2000	1870	1793	1741	1704	1676	1654	1637
π^*	968	650	489	392	327	281	246	219	197
π	3227	3300	3338	3361	3377	3388	3396	3403	3408

Табл. 13. Основные экономические показатели фирм в зависимости от их числа. $\Delta = n-1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	101,3	101,8	102,3	102,7	103,0	103,3	103,5	103,6	103,7
p^*	116,0	111,5	109,5	108,4	107,8	107,3	107,0	106,7	106,5
q_1	44,0	38,8	36,1	34,4	33,2	32,4	31,8	31,3	30,9
q^*	14,7	9,7	7,2	5,7	4,7	4,1	3,5	3,1	2,8
π_1	2259	2010	1886	1812	1762	1727	1700	1679	1663
π^*	968	597	429	335	274	232	201	178	159
π	3227	3203	3174	3151	3134	3121	3110	3102	3095

Среди выводов по данной модели можно выделить следующие:

1. Суммарные прибыли фирм больше монопольных, и разница тем больше, чем слабее реакция потребителя на разницу цен.

2. При слабой и средней степени реакции потребителя на разницу цен ($\Delta \equiv 1$ и $\Delta = 2(n-1)/n$) увеличение числа фирм в состоянии даже увеличить их суммарные прибыли. Более того, увеличение до определенного предела числа фирм может увеличить и оптимальные цены всех продавцов на рынке, кроме самого дешевого. Объяснение здесь простое: при большом количестве торговых точек и их удобном расположении покупатель не покупает продукцию в самом дешевом месте.

3. При слабой реакции потребителя на разницу цен увеличение числа фирм приводит к увеличению разницы цен в них. Если же потребитель значимо реагирует на цену ($\Delta = n-1$), то при увеличении числа фирм цены быстро выравниваются, и ситуация становится очень похожей на случай картельных соглашений.

Заключение

Отметим, что спектр моделей, которые можно построить на основе условий (7), не ограничивается рассмотренными. Среди направлений развития выделим следующие:

1. Исследование других стратегий фирм, нежели максимизация прибыли в зависимости от цен конкурентов (одноуровневая игра) или с учетом ожидания их реакций (двухуровневая игра). В частности, фирмы могут принимать в расчет вероятность инверсии со стороны конкурентов. Оптимальный выбор в этом случае должен отличаться от представленных вариантов.

2. Изучение моделей со сговором (лидеры–последователь, картель, максимизация прибыли на основе ценовой дискриминации), в которых принимаемое решение зависит от того, насколько вероятно нарушение частью фирм договорных условий.

3. Исследование случая различных издержек производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авдашева С.Б., Розанова Н.М.** Теория организации отраслевых рынков: учебник. – М.: «Издательство Магистр», 1998. – 320с.
2. **Филатов А.Ю.** Развитие модели Бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 2005, том 6, с.350–354.
3. **Филатов А.Ю.** Задачи иркутских олимпиад по математической экономике 2004–2006 годов с решениями: сб. задач. – Иркутск: Иркут. ун-т, 2006. – 32 с.

THE BERTRAND OLIGOPOLY MODEL WITH IMPERFECT PRICE ELASTITY OF DEMAND FOR ANY NUMBER OF FIRMS [1]

A.Yu. Filatov

Institute of energy systems named after L.A. Melent'ev, Irkutsk
e-mail: fial@isem.sei.irk.ru)

Abstract. We consider the development of the Bertrand oligopoly model for the case of imperfect price elasticity of demand. In the classic Bertrand model the firm with the higher price lose the market. In reality the more expensive firm nevertheless has the segment of the market. So we can find the optimal prices and quantities of each firm at this situation. It is shown the possibility of the existence of the Nash equilibrium under different prices and quantities of oligopolists. The results of the experimental research are proposed.

Ключевые слова: oligopoly models, the Bertrand oligopoly, the Nash equilibrium, elasticity