УДК 330.45

МОДЕЛЬ ЦЕНОВОЙ ОЛИГОПОПОЛИИ С НЕСОВЕРШЕННОЙ ЦЕНОВОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ СПРОСА [1]

А.Ю. Филатов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Иркутск
E-mail: fial@irlan.ru

Аннотация. В работе рассматривается развитие модели олигополии Бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса. В классической модели ценовой войны Бертрана рынок полностью захватывает фирма, установившая на свою продукцию самую низкую цену. В реалистической ситуации у более дорогих фирмы до определенного ценового предела по-прежнему остается свой круг покупателей. Формализовав данное предположение, можно вывести зависимости оптимальных цен и объемов производства от цен конкурентов. Продемонстрирована возможность существования равновесия Нэша при несовпадающих ценах и объемах продаж олигополистов. Асимметрия объясняется различной реакцией потребителя на снижение цен в дорогих и дешевых фирмах – в последнем случае помимо перераспределения покупателей между фирмами наблюдается расширение суммарного спроса. На основе теории пространственной экономики осуществлено микроэкономическое обоснование данного предположения. С помощью метода Монте-Карло смоделировано влияние на спрос изменения цен в дешевых и дорогих фирмах. Приведены результаты расчетов на численном примере.

Ключевые слова: отраслевые рынки, модели олигополии, олигополия Бертрана, дифференцированный продукт, равновесие Нэша, эластичность.

Введение

Рассмотрим модель ценовой олигополии без сговора. Исходный вариант – ценовая война Бертрана [1], в котором олигополисты независимо друг от друга вырабатывают решение об уровне цены, ориентируясь на цены конкурентов, а все потребители приобретают продукцию у олигополиста с самой дешевой продукцией – имеет очевидные недостатки. В частности, следствием предпосылок такой модели в случае постоянства и равенства средних издержек является парадокс Бертрана: фирмы поочередно снижают цены до уровня себестоимости и в точке равновесия получают нулевые прибыли, что полностью эквивалентно ситуации совершенной конкуренции.

Решение парадокса Бертрана с помощью модели Эджворта, в которой объем производства каждой фирмы жестко ограничен сверху определенной величиной, или с помощью модели с возрастающими предельными издержками (мягкий вариант модели Эджворта), также не всегда адекватно

[1] Исследования выполнены при финансовой поддержке РГНФ (проект 06-02-00266а)

реальности. В связи с этим в [2] была предложена альтернативная модификация модели Бертрана, предполагающая, что при небольшом различии цен у более дорогой фирмы останутся свои покупатели. В [3] данная модель была обобщена на случай произвольного числа фирм.

Микроэкономическое обоснование модели

Обоснований данного факта может быть множество. Действительно, практически любой продукт можно считать дифференцированным, поскольку, как минимум, имеются различия в качестве обслуживания и сервисе. Также нельзя не учитывать неполноту информации и издержки на поиск самой дешевой фирмы. Однако наиболее простой и естественный вариант обоснования связан с различием в месторасположении фирм и осуществляется на основе модели размещения Хотеллинга [4].

Пусть на рынке присутствуют 2 фирмы, расположенные на разных концах (в точках 0 и 1) линейного города. Несмотря на то, что они продают однородный продукт по различным ценам p_1 и p_2 (для определенности примем $p_1 < p_2$), у второй фирмы могут быть рационально действующие покупатели – люди, проживающие неподалеку. Действительно, покупатель оценивает не только стоимость покупки, но и транспортные издержки (в т.ч. затраты времени), необходимые для того, чтобы добраться до места продажи.

Если предположить, что транспортные издержки пропорциональны расстоянию, то клиент, проживающий в точке $x \in [0;1]$ и тратящий в денежном выражении сумму t на проезд через весь город (из точки 0 в точку 1) оценивает покупку в первой фирме в сумму

$$\hat{p}_1 = p_1 + tx,$$

а во второй фирме в сумму

$$\hat{p}_2 = p_2 + t(1 - x).$$

Если минимальная из этих величин не превышает тот максимум θ, который клиент готов заплатить за продукт, покупка осуществляется. Изобразим на графиках соответствующие зависимости и проинтерпретируем их:

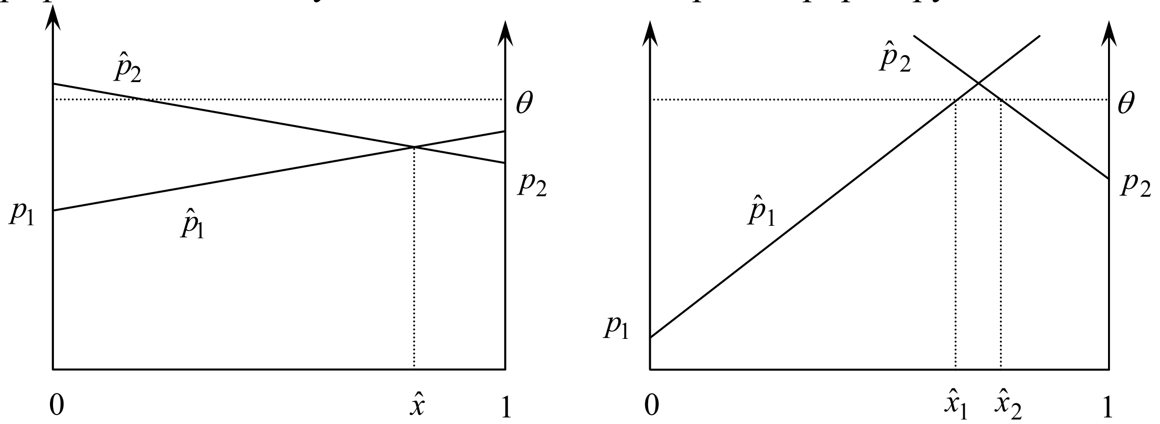

Рис.1–2. Зависимость реальной цены продукта от номинальной цены, места проживания клиента и его транспортного тарифа

На рис.1 изображена ситуация с невысоким транспортным тарифом. Таким образом, большую часть рынка, интервал $x \in [0; \hat{x})$, захватывает первая фирма, установившая меньшую цену. В то же время даже в этой ситуации более дорогая фирма обслуживает некоторое, пускай и небольшое, количество клиентов $x \in (\hat{x}; 1]$, проживающих рядом с ней. Все люди, оценившие продукт в указанную сумму θ, вне зависимости от места проживания, его приобретут.

На рис.2 транспортный тариф существенно выше. Несмотря на то, что первая фирма очень сильно снизила цену, ее клиентами останутся лишь те, чье место проживания $x \in [0; \hat{x}_1]$. Более того, проживающие в интервале $x \in (\hat{x}_1; \hat{x}_2)$ вообще откажутся от совершения покупки где бы то ни было, если их максимальная оценка продукта составляет θ.

Отметим, что для людей с высокой оценкой продукта изменение цены в любой из фирм приводит лишь к возможной смене места покупки. В то же время для людей, оценивающих порог θ ниже, уменьшение цены может оказаться значимым фактором при принятии решения о покупке. При этом с большой вероятностью критическим окажется снижение цены именно в дешевой фирме.

С помощью метода Монте-Карло попробуем смоделировать влияние на спрос изменения цен в дешевой и дорогой фирме. Пусть для некоторого потребителя проживающего в случайной точке $x \in [0; 1]$ максимальная оценка продукта равномерно распределена на отрезке $\theta \in [10; 160]$, а транспортные издержки равномерно распределены на отрезке $t \in [0; 50]$. Исходя из цен p_1 и p_2, потребитель принимает решение о приобретении или неприобретении продукта и возможном месте покупки.

Например, если цены в обеих фирмах составляют 90 руб., потребитель, проживающий в точке $x = 0{,}3$, оценивающий транспортные издержки в $t = 30$ руб., а продукт в $\theta = 100$ приобретет его в первой фирме:

$$\hat{p}_1 = 90 + 0{,}3 * 30 = 99 \text{ руб.}, \quad \hat{p}_2 = 90 + 0{,}7 * 30 = 111 \text{ руб.}$$

Заметим, что второй фирме не поможет и снижение цены до 80 руб. Также видим, что повышение транспортных издержек до $t = 40$ руб., оставляет данного человек вообще без продукта.

Смоделировав в соответствии с указанными законами распределения по 10 тыс. человек для каждой из возможных цен $p_i = \{ 60; 70; 80; ...; 150 \}$, установленных в фирмах, получим соответствующие объемы продаж. Сведем данные о спросе q_1 в первой, более дешевой, фирме, спросе q_2 во второй, более дорогой, фирме и суммарном спросе $Q = q_1 + q_2$ в таблицах 1–3. Отметим, что нет смысла рассматривать разность цен от 50 руб. и выше, поскольку при данных условиях в более дорогой фирме заведомо не останется ни одного покупателя.

Таблица 1. Зависимость спроса q_1 от цен p_1 и p_2.

$p_1 \setminus p_2$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
60	3125	4703	5324	5747	5835					
70		2742	4147	4740	5038	5184				
80			2473	3708	4131	4353	4482			
90				2130	3194	3527	3763	3836		
100					1807	2651	2940	3076	3153	
110						1452	2121	2335	2545	2471
120							1131	1636	1770	1877
130								802	1131	1236
140									474	619
150										187

Таблица 2. Зависимость спроса q_2 от цен p_1 и p_2.

$p_1 \setminus p_2$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
60	3089	1305	594	236	41					
70		2775	1185	479	166	36				
80			2477	1017	441	155	32			
90				2087	829	350	108	23		
100					1788	722	253	79	9	
110						1446	546	190	42	5
120							1100	362	115	32
130								852	227	44
140									441	84
150										164

Таблица 3. Зависимость суммарного спроса Q от цен p_1 и p_2.

$p_1 \setminus p_2$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
60	6214	6008	5918	5983	5876					
70		5517	5332	5219	5204	5220				
80			4950	4725	4572	4508	4514			
90				4217	4023	3877	3871	3859		
100					3595	3373	3193	3155	3162	
110						2898	2667	2525	2587	2476
120							2231	1998	1885	1909
130								1654	1358	1280
140									915	703
150										351

С помощью метода наименьших квадратов найдем наилучшую в классе линейных функций зависимость спроса от установленных цен:

$$Q = 10152 - 56{,}5 p_1 - 9{,}9 p_2 .$$

Видим, что спрос гораздо сильнее зависит от цены p_1, установленной в более дешевой фирме. Еще более ярко выраженным этот факт становится, если учесть наличие положительной корреляции между транспортными издержками t и максимальной ценой θ, которую человек готов заплатить за данный продукт (большую сумму, как правило, готовы заплатить более обеспеченные люди, которые более высоко ценят свое время), а также вспомнить, что p_1 и p_2 также положительно коррелированны.

Таким образом, вполне соответствующим реальности можно считать предположение, что суммарный спрос на рынке зависит именно от минимальной цены, сложившейся на рынке. Нумерацию осуществим так, что эта цена будет наблюдаться в первой фирме:

$$p_1 = \min_{i=1,\ldots,n} p_i.$$

При этом понимаем, что все результаты будут выполняться с точностью до нумерации, а значит, в реальности будет не одно, а n равновесий.

Формализация модели

Пусть на рынке присутствуют n одинаковых фирм, производящих продукцию с издержками c. Суммарный спрос на рынке составляет

$$Q = a - bp_1.$$

Если все фирмы устанавливают одинаковые цены, то этот спрос делится поровну между ними. В то же время при повышении цены в j-фирме на каждый рубль объем продаж в ней сокращается на величину $b\Delta$, а у каждого из $(n-1)$ конкурентов увеличивается на $b\Delta/(n-1)$.

Представленную модель запишем в матричном виде:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{n}\mathbf{a} + b\mathbf{B}\mathbf{p}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \ldots \\ q_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ \ldots \\ a \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\Delta - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \frac{\Delta}{n-1} & \ldots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & -\Delta & \frac{\Delta}{n-1} & \ldots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & -\Delta & \ldots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \frac{\Delta}{n-1} & \ldots & -\Delta \end{pmatrix}$.

Выпишем эти же соотношения покомпонентно:

$$q_1 = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2}^{n} p_j\right), \tag{2}$$

$$q_i = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1} b \sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} p_j - n\Delta b p_i\right),\ i = 2,\ldots,n. \tag{3}$$

Построим кривые реакции для каждой фирмы, максимизировав их прибыли:

$$\pi_1=(p_1-c)q_1=\frac{1}{n}\left(ap_1-(n\Delta+1)bp_1^2+\frac{n\Delta}{n-1}bp_1\sum_{j=2}^{n}p_j-ac+\right.$$
$$\left.+(n\Delta+1)bcp_1-\frac{n\Delta}{n-1}bc\sum_{j=2}^{n}p_j\right)\to\max_{p_1},$$
$$\pi_i=(p_i-c)q_i=\frac{1}{n}\left(ap_i+\left(\frac{n\Delta}{n-1}-1\right)bp_1p_i+\frac{n\Delta}{n-1}bp_i\sum_{j=2,\,j\neq i}^{n}p_j-n\Delta bp_i^2\right)-$$
$$-\frac{1}{n}\left(ac+\left(\frac{n\Delta}{n-1}-1\right)bcp_1+\frac{n\Delta}{n-1}bc\sum_{j=2,\,j\neq i}^{n}p_j-n\Delta bcp_i\right)\to\max_{p_i},\ i=2,\ldots,n.$$

Продифференцируем полученные функции:

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial p_1}=\frac{1}{n}\left(a-2(n\Delta+1)bp_1+\frac{n\Delta}{n-1}b\sum_{j=2}^{n}p_j+(n\Delta+1)bc\right)=0,$$
$$\frac{\partial\pi_i}{\partial p_i}=\frac{1}{n}\left(a+\left(\frac{n\Delta}{n-1}-1\right)bp_1+\frac{n\Delta}{n-1}b\sum_{j=2,\,j\neq i}^{n}p_j-2n\Delta bp_i+n\Delta bc\right)=0,\ i=2,\ldots,n.$$

Заметим, что особой является только самая дешевая фирма, все остальные не отличаются между собой, следовательно, в точке равновесия будут выполняться условия

$$\begin{aligned}&p_2=p_3=\ldots=p_n=p^*,\\&q_2=q_3=\ldots=q_n=q^*,\\&\pi_2=\pi_3=\ldots=\pi_n=\pi^*.\end{aligned}\tag{4}$$

С учетом этого кривые реакции [3] примут следующий вид:

$$\begin{cases}p_1(p^*)=\dfrac{a+(n\Delta+1)bc+n\Delta bp^*}{2b(n\Delta+1)},\\[2ex] p^*(p_1)=\dfrac{\dfrac{n-1}{n}\dfrac{a}{b}+(n-1)\Delta c+\dfrac{n\Delta-n+1}{n}p_1}{n\Delta}.\end{cases}\tag{5}$$

Решив систему уравнений (5), получим точку равновесия

$$\begin{aligned}&p_1=c+\frac{\frac{a}{b}-c}{n\Delta+1+n/(2n-1)},\\&p^*=c+\frac{\frac{a}{b}-c}{n\Delta}-\frac{\frac{2}{2n-1}\left(\frac{a}{b}-c\right)}{n\Delta^2+\Delta+n\Delta/(2n-1)}.\end{aligned}\tag{6}$$

Оптимальные объемы производства найдем по формулам (2), (3) с учетом равенств (4). Они имеют следующий вид:

$$q_1 = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + n\Delta bp^*\right),$$
$$q^* = \frac{1}{n}\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 - \frac{n}{n-1}\Delta bp^*\right). \quad (7)$$

Рассмотрим несколько возможных вариантов значений величины Δ. Первый вариант $\Delta \equiv 1$ означает, что изменение цены в любой из фирм приведет к изменению объема ее продаж, не зависящему от количества конкурентов. В то же время, при большом числе фирм на рынке влияние на каждого из конкурентов становится малым.

Второй вариант (противоположная крайность) $\Delta = n-1$ приводит к тому, что увеличение числа конкурентов резко усиливает реакцию потребителей на изменение цены одного из них. В этом случае продажи каждого из $(n-1)$ конкурентов изменяются на фиксированную величину, вне зависимости от их числа. Следовательно, продажи самой фирмы меняются прямо пропорционально количеству конкурентов.

Третий, промежуточный вариант $\Delta = 2(n-1)/n$ с одной стороны предполагает усиление реакции потребителя на изменение цены в одной из фирм при увеличении числа конкурентов, но с другой для конкурентного рынка (при $n \to \infty$ $\Delta \to 2$) влияние всего вдвое сильнее, чем в случае дуополии (при $n = 2$ $\Delta = 1$). Дополнительным обоснованием для третьего варианта является тот факт, что если все дорогие фирмы ведут единую ценовую политику $p_2 = p_3 = ... = p_n = p^*$, то функция спроса на их продукцию

$$q^* = (a + bp_1 - 2bp^*)/n$$

идентична случаю, описанному в [2]. В частности, при любой зафиксированной цене дешевой фирмы, ее конкуренты полностью теряют рынок (q^* обращается в ноль) при одной и той же цене, не зависящей от их количества.

Продемонстрируем полученные результаты на приведенном выше численном примере с $Q = 160 - p$ и $c = 50$. Сведем в таблицах 4, 5 и 6 равновесные цены, объемы продаж, прибыли фирм, а также суммарные прибыли на рынке в зависимости от их количества и реакции рынка на изменение цен.

Таблица 4. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta \equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{p_1}$	80,0	73,9	69,7	66,8	64,6	62,9	61,5	60,4	59,5
$\boldsymbol{p^*}$	85,0	77,1	71,9	68,3	65,7	63,7	62,2	61,0	60,0
$\boldsymbol{q_1}$	45,0	31,9	24,7	20,1	17,0	14,7	13,0	11,6	10,5
$\boldsymbol{q^*}$	35,0	27,1	21,9	18,3	15,7	13,7	12,2	11,0	10,0
$\boldsymbol{\pi_1}$	1350	762	487	338	248	190	150	121	100
$\boldsymbol{\pi^*}$	1225	734	478	334	246	189	149	121	100
$\boldsymbol{\pi}$	2575	2231	1921	1673	1478	1321	1194	1088	999

Таблица 5. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	80,0	69,6	64,5	61,5	59,5	58,1	57,1	56,3	55,6
p^*	85,0	71,6	65,6	62,2	60,0	58,4	57,3	56,5	55,8
q_1	45,0	32,7	25,4	20,7	17,5	15,1	13,3	11,9	10,7
q^*	35,0	28,8	23,3	19,4	16,6	14,5	12,8	11,5	10,4
π_1	1350	643	369	239	166	123	94	74	60
π^*	1225	622	363	236	165	122	94	74	60
π	2575	1888	1460	1183	993	855	750	668	602

Таблица 6. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = n-1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	80,0	64,5	58,1	55,1	53,5	52,5	51,9	51,5	51,2
p^*	85,0	65,4	58,4	55,2	53,5	52,6	51,9	51,5	51,2
q_1	45,0	33,8	26,3	21,4	18,0	15,5	13,6	12,1	10,9
q^*	35,0	30,9	25,2	20,9	17,7	15,3	13,5	12,0	10,9
π_1	1350	489	214	109	63	39	26	18	13
π^*	1225	477	211	109	63	39	26	18	13
π	2575	1442	848	545	376	274	208	163	131

Представленные результаты демонстрируют, что

1. Увеличение числа фирм на рынке приводит к снижению и выравниванию цен, снижению прибылей фирм (в том числе, суммарной) и их выравниванию, однако даже при большом количестве фирм, все они в состоянии получать прибыль.

2. Увеличение значения Δ, что означает усиление реакции потребителя на разницу цен ($\Delta \to \infty$ приводит к классической модели Бертрана), ведет к более быстрому снижению и выравниванию цен, сокращению и выравниванию прибылей фирм. В то же время, даже при большом, но конечном значении Δ фирмы в состоянии получать прибыль.

Представленная модель имеет некоторые общие черты с моделью олигополии Курно с поправкой на то, что в ней стратегическими переменными являются не объемы продаж, а цены. Соответственно, можно рассмотреть и ценовой аналог модели Штакельберга.

Однако прежде, чем перейти к рассмотрению модифицированных моделей, необходимо убедиться в том, что не произойдет «инверсии фирм»: при достаточно высокой цене первой фирмы, кому-то из конкурентов будет экономически выгоднее занять ее место, выиграв в объеме продаж сильнее, чем потеряв в удельной прибыли. Первая фирма будет стараться не допустить подобной ситуации.

Возможность инверсии фирм

Определим, при каких ценах первая фирма может гарантировать себе место самой дешевой. Пускай ее цена составляет p_1. Тогда оптимальной ценой остальных олигополистов будет $p^*(p_1)$. При этом каждый из них будет продавать продукцию в объеме $q^*(p_1, p^*(p_1))$, а прибыль составит

$$\pi^* = (p^*(p_1) - c)q^*(p_1, p^*(p_1)).$$

Если кто-то из дорогих конкурентов решит занять место дешевой фирмы, продавая продукцию по цене $\underline{p}^*$, а остальные фирмы оставят цены на прежнем уровне, то ее объем продаж составит

$$\underline{q}^* = \frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)b\underline{p}^* + n\Delta b p^* - \frac{n\Delta}{n-1} b(p^* - p_1)\right),$$

а прибыль будет равна

$$\underline{\pi}^* = (\underline{p}^* - c)\underline{q}^* = \frac{1}{n}(\underline{p}^* - c)\left(a - (n\Delta + 1)b\underline{p}^* + n\Delta b p^* - \frac{n\Delta}{n-1} b(p^* - p_1)\right).$$

Вычислив производную и приравняв ее к нулю, найдем оптимальную цену:

$$\underline{p}^* = \frac{a/b + (n\Delta + 1)c + n\Delta p^* - \dfrac{n\Delta}{n-1}(p^* - p_1)}{2(n\Delta + 1)}.$$

Первая фирма будет защищена от подобного развития событий, если будет выполняться условие $\pi^* > \underline{\pi}^*$.

В общем случае зависимость критической цены первой фирмы от числа фирм и реакции рынка на изменение цен имеет довольно сложный вид, однако в каждом конкретном случае легко проверить, может ли иметь место инверсия фирм. Также нетрудно численно найти максимальную цену p_1, при которой первая фирма гарантирует себе место самой дешевой.

Аналогично рассмотрим симметричный случай, когда дешевая фирма повышает цену до значения $\overline{p}_1$, а остальные остаются на прежнем уровне p^*. Ее объем продаж вычисляется по формуле

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{n}\left(a + (n\Delta - 1)bp^* - n\Delta b\overline{p}_1\right)$$

а прибыль

$$\overline{\pi}_1 = (\overline{p}_1 - c)\overline{q}_1 = \frac{1}{n}(\overline{p}_1 - c)\left(a + (n\Delta - 1)bp^* - n\Delta b\overline{p}_1\right)$$

будет максимальна [3] при цене

$$\overline{p}_1 = \frac{a + (n\Delta - 1)bp^* + bcn\Delta}{2bn\Delta}$$

Первая фирма уйдет с дешевого сегмента рынка, если цены конкурентов будут слишком низкими и потеря части покупателей компенсируется существенным увеличением удельной прибыли: $\overline{\pi}_1 > \pi_1$.

Однако на рынках, находящихся в состоянии равновесия, подобная ситуация, в отличие от предыдущего случая, маловероятна. Легко убедиться, что в равновесии Нэша (6)–(7) для всех трех рассмотренных значений Δ первой фирме выгодно оставаться самой дешевой. Все последующие модели связаны с увеличением прибылей на основе повышения цен, следовательно, в них проверки второго вида инверсии вообще не требуется.

Модель «лидер–последователь»

Найдем равновесие Нэша в двухуровневой игре. Исходя из предположения, что все дорогие фирмы (последователи) будут вести себя оптимальным образом, самая дешевая фирма (лидер) максимизирует свою прибыль

$$\pi_1(p_1, p^*(p_1)) = (p_1 - c)q_1(p_1, p^*(p_1)) =$$
$$= (p_1 - c)\frac{1}{n}\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + n\Delta bp^*(p_1)\right).$$

Приравняв к нулю производную и проведя ряд преобразований, получим

$$p_1 = c + \frac{a/b - c}{2 + n - n\Delta/(2n-1)}. \qquad (8)$$

Остается проверить возможность инверсии первого вида: существенное снижение цены одним из дорогих конкурентов. Как показывают расчеты для приведенного выше численного примера, при $\Delta \equiv 1$ (потребители слабо реагируют на разницу цен) и $n > 2$ инверсии не произойдет. В то же время, если усиливается значимость ценового фактора для потребителя ($\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n - 1$), первая фирма не в состоянии поднять цену до уровня (8) из-за риска снижения цены кем-то из конкурентов. Таким образом, цена будет установлена на максимальном уровне, гарантирующем отсутствие инверсии.

Сведем в таблицах 7, 8 и 9 данные по ценам, объемам продаж и прибылям, выдаваемые моделью «лидер(1)–последователи(*)» в зависимости от количества фирм и реакции рынка на изменение цен. Как и в случае одновременного выбора оптимальных цен, рассмотрим 3 возможные ситуации: $\Delta \equiv 1$, $\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n - 1$.

Таблица 7. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta \equiv 1$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	81,9	75,0	70,3	67,1	64,8	63,0	61,6	60,5	59,6
p^*	85,5	77,2	71,9	68,3	65,7	63,7	62,2	61,0	60,0
q_1	42,6	30,6	24,1	19,8	16,8	14,6	12,9	11,5	10,5
q^*	35,5	27,2	21,9	18,3	15,7	13,7	12,2	11,0	10,0
π_1	1360	764	488	338	248	190	150	121	100
π^*	1258	741	479	334	246	189	149	121	100
π	2618	2246	1925	1675	1478	1322	1194	1088	999

Таблица 8. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = 2(n-1)/n$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	81,9	70,5	65,0	61,8	59,7	58,3	57,2	56,4	55,7
p^*	85,5	71,8	65,6	62,2	60,0	58,4	57,3	56,5	55,8
q_1	42,6	31,4	24,6	20,2	17,1	14,8	13,1	11,7	10,6
q^*	35,5	29,0	23,4	19,5	16,6	14,5	12,8	11,5	10,4
π_1	1360	646	370	239	167	123	94	74	60
π^*	1258	631	366	237	166	122	94	74	60
π	2618	1908	1469	1189	996	857	751	669	602

Таблица 9. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = n-1$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	81,9	64,9	58,3	55,2	53,5	52,5	51,9	51,5	51,2
p^*	85,5	65,5	58,4	55,2	53,5	52,6	51,9	51,5	51,2
q_1	42,6	32,9	25,9	21,2	17,9	15,5	13,7	12,1	11,2
q^*	35,5	31,1	25,3	20,9	17,7	15,3	13,5	12,0	10,8
π_1	1360	491	214	110	63	39	26	18	13
π^*	1258	483	213	109	63	39	26	18	13
π	2618	1458	853	546	377	274	208	163	131

Основным нетривиальным выводом, диаметрально противоположным результатам модели Штакельберга, является факт, что хотя лидер, повышая цену, увеличивает свою прибыль, но сильнее свои прибыли увеличивают последователи. Если же последователи каким-то образом в состоянии сигнализировать дешевой фирме о своем нежелании бороться за дешевый ценовой сегмент (гарантируют отсутствие инверсии), то их прибыли увеличиваются еще существеннее.

Симметричный случай дорогого лидера реализуется только в том случае, если все дорогие фирмы гарантируют сохранение единых цен p^*. Поскольку односторонний отказ от данной стратегии в пользу инверсии при высоких ценах экономически выгоден для каждой отдельной фирмы, подобная ситуация возможна только в результате сговора. В то же время такой сговор принесет его участникам существенное увеличение прибылей. Рассмотрим эту ситуацию.

Предполагая, что первая фирма (последователь) будет вести себя оптимальным образом, лидеры могут максимизировать прибыль:

$$\pi^*(p_1(p^*), p_1) = (p^* - c)q^*(p_1(p^*), p^*) =$$
$$= \frac{1}{n}(p^* - c)\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1(p^*) - \frac{n}{n-1}\Delta bp^*\right).$$

Выполнив ряд преобразований, обнаружим, что объемы продаж лидеров равны

$$q^* = \frac{\Delta bc}{2(n-1)} + \frac{a-bc}{2n} + \frac{an\Delta}{2(n-1)(n\Delta+1)} - \frac{\Delta bp^*(n\Delta+n+1)}{2(n-1)(n\Delta+1)}.$$

Приравняв к нулю производную функции прибыли, получим оптимальную цену лидеров

$$p^* = c + \frac{(a-bc)\left(2n^2\Delta - n\Delta + n - 1\right)}{2n\Delta b(n\Delta+n+1)}.$$

Расчеты показывают, что благодаря сговору лидеры могут существенно поднять цены – тем сильнее, чем слабее реакция потребителя на разницу цен. Если в предыдущей модели «лидер(1)–последователи(*)» при большом количестве фирм цены и объемы продаж практически полностью совпадали с исходным равновесием Нэша, то здесь даже при $n=10$ наблюдается существенное отличие.

Второй вывод сходен с выводом по предыдущей модели, но выражен более ярко: последователь получает большую (и в данном случае существенно большую) прибавку к прибыли, чем лидеры. Разница достигает нескольких раз.

И, наконец, третий вывод заключается в следующем: при выполнении определенных условий (не очень сильная реакция потребителей на разницу цен) в рамках данной модели возможно увеличение суммарной прибыли при увеличении количества фирм. Что говорит, в частности, об экономической целесообразности дробления крупных компаний на несколько мелких. Доля дешевой фирмы на рынке при этом, конечно, снижается.

Результаты, полученные для приведенного численного примера в соответствии с моделью «лидеры(*)–последователь(1)» в зависимости от количества фирм и трех вариантов реакции рынка на изменение цен $\Delta \equiv 1$, $\Delta = 2(n-1)/n$ и $\Delta = n-1$, сведены в таблицах 10, 11 и 12.

Таблица 10. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta \equiv 1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	81,2	80,4	79,9	79,6	79,3	79,1	78,9	78,8	78,7
p^*	88,5	94,5	97,4	99,0	100,1	100,8	101,4	101,8	102,1
q_1	46,8	40,6	37,4	35,5	34,2	33,3	32,6	32,0	31,6
q^*	32,1	19,5	14,2	11,2	9,3	7,9	6,9	6,1	5,5
π_1	1457	1236	1121	1050	1002	968	942	922	905
π^*	1235	867	673	550	465	403	356	318	288
π	2692	2971	3140	3251	3330	3388	3433	3469	3498

Таблица 11. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = 2(n-1)/n$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	81,2	76,1	73,9	72,7	71,9	71,4	71	70,7	70,4
p^*	88,5	87,8	87,5	87,3	87,2	87,1	87,1	87,0	87,0
q_1	46,8	43,5	41,9	40,9	40,2	39,7	39,3	39,0	38,8
q^*	32,1	20,2	14,7	11,6	9,6	8,2	7,1	6,3	5,6
π_1	1457	1138	1002	927	880	848	824	806	792
π^*	1235	763	552	433	357	303	263	233	209
π	2692	2663	2659	2661	2663	2665	2667	2669	2671

Таблица 12. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = n-1$

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	81,2	70,4	65,1	61,9	59,8	58,3	57,3	56,4	55,7
p^*	88,5	79,3	73,5	69,5	66,6	64,5	62,8	61,5	60,4
q_1	46,8	47,7	48,9	49,9	50,7	51,2	51,7	52,0	52,3
q^*	32,1	21,0	15,3	12,0	9,9	8,4	7,3	6,4	5,8
π_1	1457	974	737	593	497	427	375	334	301
π^*	1235	615	360	234	164	122	93	74	60
π	2692	2203	1816	1531	1319	1156	1028	925	841

Отметим еще одно свойство. В отличие от модели олигополии Штакельберга, где решение всех фирм играть роль лидеров приводит к катастрофическому затовариванию рынка и снижению цен, здесь одновременное повышение цен до лидерского уровня только увеличит их суммарные прибыли.

Картель и максимизация прибыли

Для полноты исследования рассмотрим возможные действия фирм в ситуации сговора. Классическая модель предлагает картельные соглашения – сокращение суммарного объема производства до монопольного и соответственное увеличение цены. Квоты для всех участников рынка в этом случае устанавливаются на уровне

$$q_i = \frac{1}{2n}(a - bc),\ i = 1,\dots,n,$$

а цены – на уровне

$$p_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + c\right),\ i = 1,\dots,n.$$

Для приведенного численного примера цена установится на уровне $p = 105$ руб., а зависимость объема продаж от числа фирм на рынке выразится формулой $q_i = 55/n$. Суммарная прибыль всех фирм будет неизменно равна $\pi = 3025$. Сведем все данные по модели в таблице 13.

Таблица 13. Экономические показатели фирм в зависимости от их числа

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
q_i	27,5	18,3	13,8	11	9,2	7,9	6,9	6,1	5,5
π_i	1513	1008	756	605	504	432	378	336	303

Суммарная прибыль в ситуации картеля при классических предпосылках будет максимальна. Действительно, одновременное изменение цен фирм как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения сократит их прибыли, а одностороннее изменение приведет к полному захвату рынка более дешевой фирмой, что выгодно для нее, но обнулит прибыль конкурента и уменьшит суммарную прибыль.

В нашей ситуации, когда остаются покупатели, по каким-либо причинам покупающие продукцию в более дорогой фирме, можно получить суммарную прибыль, больше картельной с помощью ценовой дискриминации: покупатели, ориентированные на минимум цены, покупают у более дешевого производителя, а часть из обеспеченных (кому все равно или почти все равно) заплатит больше. Найдем оптимальные цены с помощью максимизации суммарной прибыли:

$$\pi(p_1,...,p_n) = \pi_1(p_1,...,p_n) + ... + \pi_n(p_1,...p_n) = (p_1 - c)q_1 + ... + (p_n - c)q_n =$$
$$= \frac{1}{n}(p_1 - c)\left(a - (n\Delta + 1)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1}b(p_2 + ... + p_3)\right) +$$
$$+ \frac{1}{n}(p_2 - c)\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1}b(p_3 + ... + p_n) - n\Delta bp_2\right) + ... +$$
$$+ \frac{1}{n}(p_n - c)\left(a + \left(\frac{n\Delta}{n-1} - 1\right)bp_1 + \frac{n\Delta}{n-1}b(p_2 + ... + p_{n-1}) - n\Delta bp_n\right) \to \max_{p_1,...,p_n}.$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю. Попутно заметим, что для всех дорогих фирм $i = 2,...,n$ условия будут одинаковыми. Следовательно, все они в точке оптимума установят единую цену $p_2 = p_3 = ... = p_n = p^*$. Условия оптимальности будут выглядеть следующим образом:

$$p_1 = \frac{\frac{a}{b} + nc + (2n\Delta - n + 1)p^*}{2(n\Delta + 1)}, \quad p^* = \frac{\frac{a}{b}(n-1) + (2n\Delta - n + 1)p_1}{2n\Delta}. \qquad (9)$$

Решив систему уравнений (9) относительно p_1 и p^*, получим

$$p^* = \frac{\frac{a}{b}\left(2n^2\Delta + n - 1\right) + c\left(2n^2\Delta - n^2 + n\right)}{4n^2\Delta - n^2 + 2n - 1}. \qquad (10)$$

Ситуация (10), в отличие от равновесий Нэша в одноуровневой и двухуровневой играх, не является устойчивой. Для каждой из дорогих фирмы есть огромные стимулы снизить цену и увеличить свою долю на рынке. Однако в случаях, если соглашения между фирмами достаточно жесткие (или, например, в случае, когда существует несколько торговых точек, принадлежащих одному производителю), суммарная прибыль (которая затем может перераспределяться) будет максимальна и больше монопольной. Результаты расчетов на численном примере сведем в таблицах 14, 15 и 16.

Таблица 14. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta \equiv 1$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	1	1	1	1	1	1	1	1
p_1	101,3	98,1	96,0	94,5	93,4	92,6	92,0	91,5	91,0
p^*	116,0	118,8	120,0	120,7	121,2	121,5	121,7	121,9	122,1
q_1	44,0	41,3	40,0	39,3	38,8	38,5	38,3	38,1	37,9
q^*	14,7	10,3	8,0	6,5	5,5	4,8	4,3	3,8	3,4
π_1	2259	1985	1840	1749	1687	1641	1606	1579	1556
π^*	968	709	560	463	395	344	305	274	249
π	3227	3403	3520	3601	3661	3706	3741	3770	3793

Таблица 15. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = 2(n-1)/n$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8
p_1	101,3	100,0	99,3	98,9	98,6	98,4	98,2	98,1	98,0
p^*	116,0	115,0	114,5	114,2	114,0	113,8	113,7	113,6	113,5
q_1	44,0	40,0	37,9	36,7	35,8	35,2	34,7	34,4	34,1
q^*	14,7	10,0	7,6	6,1	5,1	4,4	3,9	3,4	3,1
π_1	2259	2000	1870	1793	1741	1704	1676	1654	1637
π^*	968	650	489	392	327	281	246	219	197
π	3227	3300	3338	3361	3377	3388	3396	3403	3408

Таблица 16. Экономические показатели фирм. Случай $\Delta = n-1$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	101,3	101,8	102,3	102,7	103,0	103,3	103,5	103,6	103,7
p^*	116,0	111,5	109,5	108,4	107,8	107,3	107,0	106,7	106,5
q_1	44,0	38,8	36,1	34,4	33,2	32,4	31,8	31,3	30,9
q^*	14,7	9,7	7,2	5,7	4,7	4,1	3,5	3,1	2,8
π_1	2259	2010	1886	1812	1762	1727	1700	1679	1663
π^*	968	597	429	335	274	232	201	178	159
π	3227	3203	3174	3151	3134	3121	3110	3102	3095

Среди выводов по данной модели можно выделить следующие:

1. Суммарные прибыли фирм больше монопольных, и разница тем больше, чем слабее реакция потребителя на разницу цен.

2. При слабой и средней степени реакции потребителя на разницу цен ($\Delta \equiv 1$ и $\Delta = 2(n-1)/n$) увеличение числа фирм в состоянии даже увеличить их суммарные прибыли. Более того, увеличение до определенного предела числа фирм может увеличить и оптимальные цены всех продавцов на рынке, кроме самого дешевого. Объяснение здесь простое: при большом количестве торговых точек и их удобном расположении покупатель не покупает продукцию в самом дешевом месте.

3. При слабой реакции потребителя на разницу цен увеличение числа фирм приводит к увеличению разницы цен в них. Если же потребитель значимо реагирует на цену ($\Delta = n-1$), то при увеличении числа фирм цены быстро выравниваются, и ситуация становится очень похожей на случай картельных соглашений.

Заключение

Отметим, что спектр моделей, которые можно построить на основе условий (1), не ограничивается рассмотренными. Среди направлений развития выделим следующие:

1. Исследование других стратегий фирм, нежели максимизация прибыли в зависимости от цен конкурентов (одноуровневая игра) или с учетом ожидания их реакций (двухуровневая игра). В частности, фирмы могут принимать в расчет вероятность инверсии со стороны конкурентов. Оптимальный выбор в этом случае должен отличаться от представленных вариантов.

2. Изучение моделей со сговором (лидеры–последователь, картель, максимизация прибыли на основе ценовой дискриминации), в которых принимаемое решение зависит от того, насколько вероятно нарушение частью фирм договорных условий.

3. Исследование случая различных издержек производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bertrand J.** Theorie Mathematique de la Richesse Sociale // «Journal des savants». – 1883. – P.499–508.
2. **Филатов А.Ю.** Развитие модели Бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, 2005. – том 6. – С.350–354.
3. **Филатов А.Ю.** Модель олигополии Бертрана с несовершенной ценовой эластичностью спроса для произвольного числа фирм // «Инструменты анализа и управления переходными состояниями в экономике»: сборник статей. – Екатеринбург. – 2008. – С.111–123.
4. **Hotelling H.** Stability in Competition // «Ibid». – 1929. – V.39. – P.41–57.